1　解説

公式 1 はこんな公式でした。

公式 1.

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{k+m-1}\mathrm{P}_m = \frac{{}_{n+m}\mathrm{P}_{m+1}}{m+1} \tag{1}$$

これだけだとどんな公式だかよくわからないですよね。次のような式に書き換えてみましょう。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m+1}}$$

ちょっとわかりやすくなりました。でもまだ少しわかりずらいかもしれませんね。具体的な数字を代入していくと、もっとわかりやすくなります。

まず、上の式に $m=0$ を代入します。

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

当たり前な式が出てきました。

次は、$m=1$ を代入します。

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

こちらも見慣れた公式だと思います。

では、$m=2$ を代入します。

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$m=3$ を代入します。

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

ここまでみれば、この公式の内容はわかると思います。
では、今度はどのような場面で利用できるか見ていきます。

例題.1

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+5)$$

を求めよ。

解答

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+5) &= \sum_{k=1}^{n} \{k(k+1)(k+2) + 3k(k+1)\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + 3\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + n(n+1)(n+2) \\
&= n(n+1)(n+2)(\frac{n+3}{4} + 1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+7)}{4}
\end{aligned}$$

例題.2

$$\sum_{k=1}^{n} (k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 3k)$$

を求めよ。

解答

$$\sum_{k=1}^{n} (k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 3k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4k(k+1)(k+2) - 7k(k+1)\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) + 4\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) - 7\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} + n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{7n(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(3n^2 + 36n + 46)}{15}
\end{aligned}$$

例題.3

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(k^2+5k+1)$$

を求めよ。

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(k^2+5k+1) &= \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\{k(k+1)+4k+1\} \\
&= \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k(k+1)+4\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}1 \\
&= \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n}m(m+1)(m+2)+2\sum_{m=1}^{n}m(m+1)+\sum_{m=1}^{n}m \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)+\frac{2}{3}n(n+1)(n+2)+n(n+1) \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)(n^2+13n+34)
\end{aligned}$$

以上の例題は全て、この公式 1 を知らなくても $\sum_{k=1}^{n}1$, $\sum_{k=1}^{n}k$,$\sum_{k=1}^{n}k^2$,$\sum_{k=1}^{n}k^3$, $\sum_{k=1}^{n}k^4$ の 5 つの総和の公式を知っていれば解くことができます。

逆に言えば、公式 1 はこれ一つで上の 5 つの公式の代用をすることが出来ます。また、例題 1、例題 3 のように公式 1 を使った方が楽に解くことができる問題も多くあります。

もちろん、 $\sum_{k=1}^{n}k^5$ や $\sum_{k=1}^{n}k^6$ などの代わりにも使えるので、この公式 1 一つで 5 次式の総和や 6 次式の総和も解くことができます。ただし、実際に 5 次式や 6 次式の問題を解くにはひどく労力が必要です。

2　証明

$$
\begin{aligned}
k(k+1)\cdots(k+m-1)(k+m)-(k-1)k(k+1)\cdots(k+m-1) &= (m+1)k(k+1)\cdots(k+m-1) \\
n(n+1)\cdots(n+m-1)(n+m)-0 &= (m+1)\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) \\
\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) &= \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{(m+1)}
\end{aligned}
$$

まず 1 段目の引き算を行って、両辺の和をとります。後はちょっと式を変形して証明終わりです。